CANPOINT®

导学案

主编 肖德好

全品学练考

高中数学

选择性必修第一册 RJB

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

江西美术出版社
全国百佳出版单位

目录 Contents

01 第一章 空间向量与立体几何
PART ONE

02 第二章 平面解析几何
PART TWO

导学案 LEARN 第一章　空间向量与立体几何

1.1　空间向量及其运算

1.1.1　空间向量及其运算

第 1 课时　空间向量的概念及线性运算

【学习目标】

1. 了解空间向量的相关概念；
2. 会用平行四边形法则、三角形法则作出空间向量的和与差，掌握空间向量的数乘运算的意义及运算律.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　空间向量的有关概念**

1. 定义：空间中既有________又有________的量称为空间向量. 向量的大小也称为向量的________(或________). 空间向量可用有向线段表示，有向线段的________表示向量的大小，向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 几类特殊的空间向量

名称	定义	表示
零向量	始点和终点________的向量称为零向量，零向量的方向是不确定的	用________表示，$\|\boldsymbol{0}\|=0$
单位向量	模等于________的向量称为单位向量	用 $\boldsymbol{e}$ 表示，$\|\boldsymbol{e}\|=$________
相等向量	大小________、方向________的向量称为相等向量	记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$
两个向量平行(共线)	如果两个非零向量的方向________或________，则称这两个向量平行. 规定零向量与任意向量平行	记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)零向量没有方向.　(　　)

(2)两个有公共终点的向量一定是共线向量.　(　　)

(3)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$.　(　　)

(4)所有的单位向量都是相等向量.　(　　)

◆ **知识点二　共面向量**

一般地，空间中的多个向量，如果表示它们的有向线段通过平移之后，都能在____________内，则称这些向量共面.

注意：空间中任意两个向量都是共面的，但空间中任意三个向量不一定共面.

◆ **知识点三　空间向量的加法运算**

1. 运算法则

①三角形法则：给定两个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在该平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，作出向量 $\overrightarrow{AC}$，则________是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(也称________为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量)，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，因此 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$________. 当平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形，这种求两向量和的作图方法也常称为向量加法的三角形法则. 因为空间中的任意两个向量都共面，所以空间中两个向量的和，除了 A 点可以在空间中任意选定之外，其他的与平面情形完全一样. 特别地，向量加法的三角形法则在空间中也成立.

②平行四边形法则：任意给定两个不共线的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，以 AB,AC 为邻边作一个平行四边形 $ABDC$，作出向量 $\overrightarrow{AD}$，则________$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2. 运算律

加法交换律：____________.

加法结合律：____________.

3. 结论:三个不共面的向量的和,等于以这三个向量为邻边的平行六面体中,与这三个向量有共同始点的________所表示的向量.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. ( )

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AO}$. ( )

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. ( )

◆ 知识点四 空间向量的减法运算

1. 相反向量:给定一个空间向量,我们把与这个向量________、________的向量称为它的相反向量.

2. 向量减法的三角形法则:在空间中任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,作出向量 $\overrightarrow{BA}$,则向量________就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差(也称 $\overrightarrow{BA}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量),即 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$________. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 正好能构成一个三角形.

◆ 知识点五 空间向量的数乘运算

1. 数乘向量:给定一个实数 λ 与任意一个空间向量 $\boldsymbol{a}$,规定它们的乘积是一个空间向量,记作________.

(1)当 $\lambda\neq0$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为________,而且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向:

①当 $\lambda>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________;

②当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________.

(2)当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=$________.

上述实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算简称为数乘向量.

2. 向量平行:如果存在实数 λ,使得________,则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

3. 三点共线:如果存在实数 λ,使得________,则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 平行且有公共点 A,从而 A,B,C 三点一定共线. 特别地,当 $\lambda=$________,即________时,B 为线段 AC 的中点.

4. 运算律:$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}=$________$(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$________$(\lambda\in\mathbf{R})$.

空间向量的加法、减法与数乘运算,以及它们的混合运算,统称为空间向量的________运算.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)空间向量的数乘运算中 λ 只决定向量的大小,不决定向量的方向. ( )

(2)如果向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,那么一定存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 成立. ( )

(3)若点 C 是线段 AB 的三等分点,则 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的有关概念及应用

例 1 (1)(多选题)下列说法中正确的是 ( )

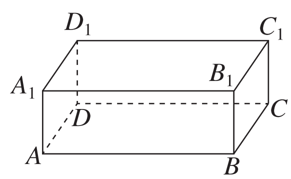
A. 若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

B. 若两个向量共线,则这两个向量方向相同

C. 若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 为非零向量,且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

D. 空间任意两个非零向量都可以平移到同一平面内

(2)(多选题)如图所示,在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=3$,$AD=2$,$AA_1=1$,则在以八个顶点中的两个分别为始点和终点的向量中 ( )



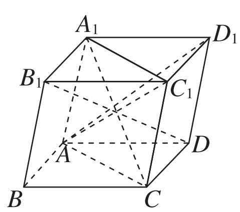
A. 单位向量有 8 个

B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个

C. $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有 4 个

D. 模为$\sqrt{5}$的向量有 4 个

变式 如图所示,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,给定下列各对向量:



① $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$;② $\overrightarrow{AD_1}$ 与 $\overrightarrow{B_1D}$;③$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$;④$\overrightarrow{CC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1A}$.

其中是相反向量的有________对.

[素养小结]

解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点:

(1)关键点:紧紧抓住向量的两个要素,即大小和方向.

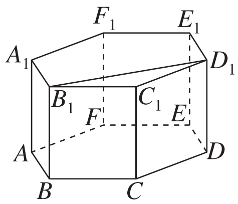
(2)注意点:①零向量不是没有方向,而是它的方向是任意的;②单位向量的方向虽然不一定相同,但它们的长度都是 1;③两个向量的模相等,不一定是相等向量,反之,若两个向量相等,则它们不仅模相等,方向也相同.

◆ 探究点二　空间向量的加减运算

例 2　如图,在正六棱柱 $ABCDEF\text{-}A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中.

(1)化简 $\overrightarrow{A_1F_1}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}$,并在图中标出化简结果的向量;

(2)化简 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{B_1D_1}$,并在图中标出化简结果的向量.



变式　(1)在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,下列各式的化简结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的共有　　(　　)

①$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC_1}$;②$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1})+\overrightarrow{D_1C_1}$;

③$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})+\overrightarrow{B_1C_1}$;④$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+\overrightarrow{B_1C_1}$.

A. 1 个　　　B. 2 个

C. 3 个　　　D. 4 个

(2)在四棱柱 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中,底面 $ABCD$ 为矩形,化简下列各式:

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{D'A'}+\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{BC}$;

②$\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$.

[素养小结]

空间向量加、减法运算的技巧:

(1)向量加法的三角形法则是解决空间向量加、减法运算的关键,灵活应用相反向量可使向量间首尾相接.

(2)利用三角形法则和平行四边形法则进行向量的加、减法运算时,务必要注意和向量、差向量的方向,必要时可采用空间向量的自由平移获得更准确的结果.

◆ 探究点三　空间向量的数乘运算及其应用

例 3　(1)[2023·河南新乡高二期中]在四面体 $OABC$ 中,D 为 AB 的中点,G 为$\triangle OBC$ 的重心,则 $\overrightarrow{DG}=$　　(　　)

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

D. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

(2)在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,点 P 在棱 B_1C_1 上,且 $B_1P=\frac{1}{3}B_1C_1$,则 $\overrightarrow{AP}=$　　(　　)

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$

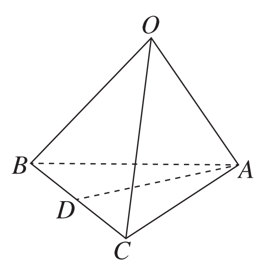
D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$

变式　(1)[2023·天津杨柳青一中高二月考]在四面体 $ABCD$ 中,E,F 分别是 BC,CD 的中点,则 $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=$　　(　　)

A. $\overrightarrow{AD}$　　　B. $\overrightarrow{EF}$

C. $\overrightarrow{AE}$　　　D. $\overrightarrow{AF}$

(2)[2023·天津田家炳中学高二月考]如图,在三棱锥 $O\text{-}ABC$ 中,D 是 BC 的中点,若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{AD}=$ ________.(用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示)



[素养小结]

利用数乘运算进行向量表示的技巧:

(1)数形结合:利用数乘运算解题时,要结合具体图形,利用三角形法则、平行四边形法则,将目标向量转化为已知向量.

(2)明确目标:在化简过程中要有目标意识,巧妙运用中点性质.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. [2023·山东烟台高二期中] 在四面体 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CN}$,若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$,则 $x+y+z=$ (　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

2. [2023·四川凉山高二期中] 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AC\cap BD=O$,点 P 在面对角线 AD_1 上,且 $PD_1=2AP$,则 $\overrightarrow{OP}=$ (　　)

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$

B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$

3. (多选题)[2023·黑龙江齐齐哈尔恒昌中学高二期中] 下列说法正确的是 (　　)

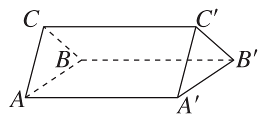
A. 若 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

B. 若 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$,则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 一定共线

C. 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,则 AB 与 CD 为同一线段

D. 非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 都是共面向量,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 必共面

4. 如图所示,在三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中,$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{A'C'}$ 是________向量,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B'A'}$ 是________向量.(填“相等”或“相反”)



5. 在四面体 $ABCD$ 中,设 E,F 分别是 BC,CD 的中点,则 $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})=$________.

第 2 课时　空间向量的数量积

【学习目标】

1. 掌握空间向量的夹角概念及表示方法;
2. 掌握两个空间向量的数量积的概念、性质、计算方法及运算规律;
3. 能运用数量积求向量夹角和判断向量的共线与垂直.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　两个空间向量的夹角

1. 定义:给定两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,任意在空间中选定一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则大小在 $[0,\pi]$ 内的 $\angle AOB$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的________,记作________.

2. 如果 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$________,记作________.

3. 规定:零向量与任意向量都垂直.

◆ 知识点二　空间向量的数量积及性质

1. 定义:两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称为内积)定义为________________.

规定:零向量与任意向量的数量积为 0.

2. 投影:一般地,给定空间向量 $\boldsymbol{a}$ 和空间中的直线 l(或平面 α),过 $\boldsymbol{a}$ 的始点和终点分别作直线 l(或平面 α)的垂线,假设垂足为 A,B,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l(或平面 α)上的投影.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量与 $\boldsymbol{b}$ 的长度的________.

3. 空间向量数量积的性质

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________.

(2) $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(3) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

(4) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

(5) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律).

(6) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

注:不满足结合律 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

【诊断分析】判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. ( )

(2)对于非零向量 $\boldsymbol{b}$,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$. ( )

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 是钝角. ( )

(4)若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为同向的空间向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. ( )

(5)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量,则向量 $\boldsymbol{e}_1$ 在向量 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$. ( )

(6)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为空间向量,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 空间向量的夹角

例 1 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,求:

(1) $\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB}\rangle$,$\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle$,$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\rangle$;

(2) $\langle\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BC'}\rangle$,$\langle\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\rangle$;

(3) $\langle\overrightarrow{D'A},\overrightarrow{D'C}\rangle$,$\langle\overrightarrow{C'D},\overrightarrow{BC'}\rangle$.

变式 在正四面体 $ABCD$ 中,点 E,F 分别是 AC,AD 的中点,则 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 的夹角为 ( )

A. 30° B. 60°

C. 120° D. 150°

[素养小结]

求两向量夹角的关键是把两向量平移到一个公共起点,找到向量的夹角,再利用解三角形的知识求角,注意向量夹角的范围是 $[0,\pi]$.

◆ 探究点二 空间向量的数量积运算

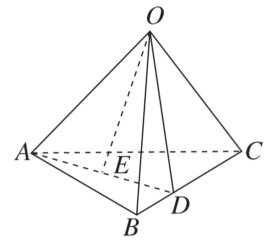
例 2 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=1$,$AD=2$,$AA_1=3$,则 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=$ ( )

A. -9 B. -3 C. 3 D. 9

变式 如图,在四面体 $OABC$ 中,$2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$,点 E 为 AD 的中点,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.

(1)试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{OE}$;

(2)若 $OA=OB=OC=2$,$\angle AOC=\angle BOC=\angle AOB=60^\circ$,求 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值.



[素养小结]

(1)空间向量数量积运算的两种方法:

①利用定义:利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 并结合运算律进行计算.

②利用图形:计算两个向量的数量积,可先将两向量平移到同一顶点,利用图形寻找夹角,再代入数量积公式进行计算.

(2)在几何体中求空间向量数量积的步骤:

①首先将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式.

②利用向量的运算律将数量积展开.

③利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 求解.

◆ 探究点三 空间向量数量积的应用

例 3 (1)已知空间向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

(2)已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{c}|=4$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

变式 (1)已知空间向量 $\boldsymbol{a}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=4$,空间向量 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\frac{2\pi}{3}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影的数量为 ( )

A. 2 B. -2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

(2)在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，侧棱 $AA_1=2$，且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$，则 $AC_1=$________，直线 BD_1 与直线 AC 所成角的余弦值为________.

[素养小结]

利用空间向量的数量积公式可求空间向量的夹角、模以及解决与垂直有关的问题.常用性质有：

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

(2)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

(3)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$.

课堂评价

知识评价　素养形成

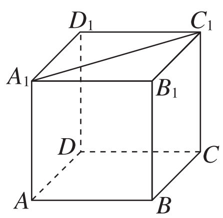
1. 如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，下列各组向量的夹角为 45°的是 (　　)

A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1}$

B. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$

C. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1D_1}$

D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B_1A_1}$



2. [2023·成都新都一中高二期中] 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，它们之间的夹角均为 90°，那么 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=$ (　　)

A. 2　　B. $\sqrt{13}$

C. $\sqrt{14}$　　D. 6

3. [2023·河北唐山高二期中] 在四面体 $ABCD$ 中，$\angle ABD=\angle BDC=90°$，$AC=2BD$，则 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影为 (　　)

A. $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　B. $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$　　D. $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

4. 在正四面体 $ABCD$ 中，$AB=2$，若 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.

5. 已知空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=135°$. 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，则 λ 的值为________.

1.1.2　空间向量基本定理

【学习目标】

1. 了解共线向量、共面向量的意义，掌握它们的表示方法；

2. 理解向量共线、共面的充要条件及其推论，并能证明空间向量的共线、共面问题；

3. 理解基底、基向量及向量的线性组合的概念.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　共线向量基本定理与共面向量定理

1. 共线向量基本定理：如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，则存在________的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

2. 平面向量基本定理：如果平面内两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$________，则对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{c}$，存在唯一的实数对 (x,y)，使得 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

3. 共面向量定理：如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$________，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是，存在________的实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

4. 判断空间中四点是否共面的方法：如果 A,B,C 三点________，则点 P 在平面 ABC 内的充要条件是，存在________的实数对 (x,y)，使 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面. (　　)

(2)若 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面，则 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. (　　)

(3)若 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，则 P,M,A,B 四点共面. (　　)

(4)若 P,M,A,B 四点共面，则 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$. (　　)

◆ 知识点二　空间向量基本定理

1. 定理：如果空间中的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$________，那么对空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组 (x,y,z)，使得____________.

2. 基底：空间中不共面的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成空间向量的一组基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$.

3. 基向量：基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都称为基向量.

4. 空间向量基本定理的三个关注点：

(1)空间任意向量：用空间三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 可以线性表示出空间中任意一个向量，而且表示的结果是唯一的.

(2)基底的选取：空间中任意三个不共面的向量都可以构成空间向量的一组基底.

(3)特别地，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，可知 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x=y=z=0$.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)空间中的任何一个向量都可用三个给定的向量表示. (　　)

(2)若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为空间向量的一组基底，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都不是零向量. (　　)

(3)若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间向量的一组基底，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. (　　)

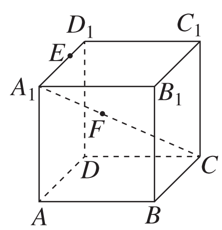
(4)任何三个不共线的向量都可构成空间向量的一组基底. (　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　共线问题

例 1 如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 在 A_1D_1 上，且 $\overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{ED_1}$，$F$ 在 A_1C 上，且 $\overrightarrow{A_1F}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$. 求证：$E$，$F$，$B$ 三点共线.



变式 (1)若空间中任意四点 O，A，B，P 满足 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中 $m+n=1$，则 P________直线 AB.(填"$\in$"或"$\notin$")

(2)设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是空间中两个不共线的向量，若 $\overrightarrow{AB}=9\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，且 A，B，D 三点共线，则实数 $m=$________.

[素养小结]

对于空间中的三点 P，A，B，可通过证明下列结论来证明三点共线：

(1)存在实数 λ，使 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 成立.

(2)对空间任一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}(t\in\mathbf{R})$.

(3)对空间任一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

◆ 探究点二　空间向量的共面问题

例 2 (1)已知 A，B，C 三点不共线，O 是平面 ABC 外任意一点，若 $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$，则 A，B，C，M 四点共面的充要条件是 (　　)

A. $\lambda=\frac{17}{30}$　　B. $\lambda=\frac{13}{30}$

C. $\lambda=-\frac{17}{30}$　　D. $\lambda=-\frac{13}{30}$

(2)已知 A，B，C 三点不共线，对平面 ABC 外的任一点 O，若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

①判断 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 是否共面；

②判断点 M 是否在平面 ABC 内.

变式 (1)(多选题)已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，则下列各选项中的三个向量共面的有 (　　)

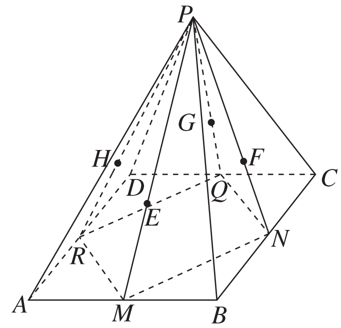
A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$

B. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$-3\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$

(2)如图所示,P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点,连接 PA,PB,PC,PD,点 E,F,G,H 分别是$\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCD,\triangle PDA$ 的重心,分别延长 PE,PF,PG,PH 交 AB,BC,CD,AD 于 M,N,Q,R,并连接 MN,NQ,QR,RM.应用共面向量定理证明:E,F,G,H 四点共面.



[素养小结]

证明空间中三个向量共面或四点共面的方法:

(1)向量表示:设法证明其中一个向量可以表示成另两个向量的线性组合,即若 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,则向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

(2)若存在有序实数组(x,y,z)使得对于空间中任一点 O,有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,且 $x+y+z=1$ 成立,则 P,A,B,C 四点共面.

(3)用平面:寻找一个平面,设法证明这些向量与该平面平行.

◆ 探究点三　空间向量基本定理及其应用

例 3 (1)在三棱锥 O-ABC 中,E 为 OA 的中点,$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$,若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{EF}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}$,则 $p+q+r=$　　(　　)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{1}{3}$　D. $-\frac{1}{2}$

(2)已知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间向量的一组基底,向量 $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间向量的另一组基底,向量 $\boldsymbol{p}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,则 $x+y=$________.

(3)[2023·广东顺德一中高二期中] 在棱长为1的正四面体 $ABCD$ 中,M 为 BC 的中点,N 为 AD 的中点,则 $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{DM}=$________.

变式 (1)[2023·西安鄠邑区高二期末] 已知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间向量的一组基底,则下列说法错误的是　　(　　)

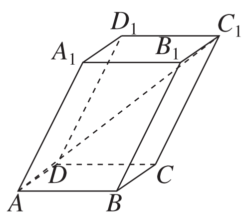
A. 若 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $x=y=z=0$

B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两共面,但 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面

C. 一定存在实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}$ 一定能构成空间向量的一组基底

(2)如图,平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,且 $\angle A_1AD=\angle A_1AB=60°$,$AA_1=2$,则线段 AC_1 的长为________.



(3)在$\triangle ABC$ 中,各个顶点与对边中点的连线,相交于一点,定义为三角形的重心 G,易得 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.类似在三棱锥 P-ABC 中,各个顶点与对面三角形的重心的连线,相交于一点,定义为三棱锥的重心 G.设 $\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$,则 $\overrightarrow{PG}=$____________.(用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示)

[素养小结]

应用空间向量基本定理的要点:

(1)定基底.基向量首先要满足不共面,其次是模已知、夹角已知,即已知的条件越多越适合做基向量.

(2)数量积运算.要将参与数量积运算的向量通过空间向量的线性运算,将其用基向量唯一表示出来,而后再进行数量积运算,应用基向量的夹角、模求值即可.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,且 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}$,则　　(　　)

A. $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 共线　　B. $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 共线

C. $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 共线　　D. $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$ 共面

2. [2023·湖北黄冈高二期中] 对空间中任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C,能得到 A,B,C,D 四点共面的是 (　　)

A. $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

3. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个向量,则下列能构成空间向量的一组基底的是 (　　)

A. $3\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$

B. $2\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a},2\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$

4. (多选题)[2023·山东聊城二中高二期中] 下列说法错误的是 (　　)

A. 若 A,B,C,D 是空间任意四点,则有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$

B. "$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线"的充要条件

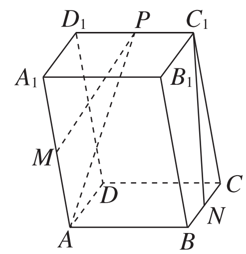
C. 若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线,则 $AB/\!/CD$

D. 对空间中任意一点 O 与不共线的三点 A,B,C,若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$(其中 $x,y,z\in\mathbf{R}$),则 P,A,B,C 四点共面

5. 如图所示,在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,设 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$,$M,N,P$ 分别是 AA_1,BC,C_1D_1 的中点,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示以下各向量:

(1)$\overrightarrow{AP}$;

(2)$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$.



1.1.3　空间向量的坐标与空间直角坐标系

第 1 课时　空间向量的坐标及运算

【学习目标】

1. 了解空间向量坐标的定义;
2. 掌握空间向量运算的坐标表示;
3. 能够利用坐标运算来求空间向量的长度与夹角.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　空间中向量的坐标

1. 单位正交基底

一般地,如果空间向量的基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 都是________,而且这三个向量________,就称这组基底为单位正交基底.

2. 单位正交分解

在单位正交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下向量的分解称为向量的单位正交分解,如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$,则称有序实数组________为向量 $\boldsymbol{p}$ 的坐标,记作____________,其中 x,y,z 都称为 $\boldsymbol{p}$ 的坐标分量.

◆ 知识点二　空间向量的坐标运算

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

向量运算	向量表示	坐标表示
相等	$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$	________
加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	________
线性运算	$\mu\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$	________
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	________
模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$	$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
夹角	$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

◆ 知识点三　空间向量的平行、垂直

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

1. 平行：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(x_2,y_2,z_2)=\lambda(x_1,y_1,z_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\_\_\_\_\_\_\_\_,\\y_2=\_\_\_\_\_\_\_\_,\\z_2=\_\_\_\_\_\_\_\_.\end{cases}$

当 $\boldsymbol{a}$ 的每一个坐标分量都不为零时，有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}$.

2. 垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$________________.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$ 是一个单位向量.（　）

(2)若空间向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 共线，则 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.（　）

(3)设 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(0,m,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=1$.（　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间向量的坐标运算

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(0,-1,2)$，求：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；(2)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

变式 (1)设 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是单位正交基底，已知向量 $\boldsymbol{p}=8\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$，则向量 $\boldsymbol{p}$ 在基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下的坐标是（　）

A. (12,14,10)　　B. (10,12,14)

C. (14,12,10)　　D. (4,3,2)

(2)[2023·沈阳高二期中] 已知向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$ 共线，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为________.

[素养小结]

解决空间向量坐标运算问题，一是直接计算，首先将空间向量用坐标表示，然后准确运用空间向量坐标运算公式计算；二是通过解方程组求其坐标.

◆ 探究点二　空间向量模与夹角的坐标表示

例 2 [2023·广东华南师大附中高二期中] 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,2,x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(1)求 $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert$；

(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值.

变式 [2023·上海曹杨二中高二期中] 在空间中,已知 $\overrightarrow{AP}=(x,y-1,z-2)$,$\overrightarrow{PB}=(3-x,-2-y,-1-z)$,$\overrightarrow{DA}=(-1,0,1)$.

(1)若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,求 $|\overrightarrow{DP}|$;

(2)求△ABD 的面积.

[素养小结]

1. 求向量的模的两种基本策略

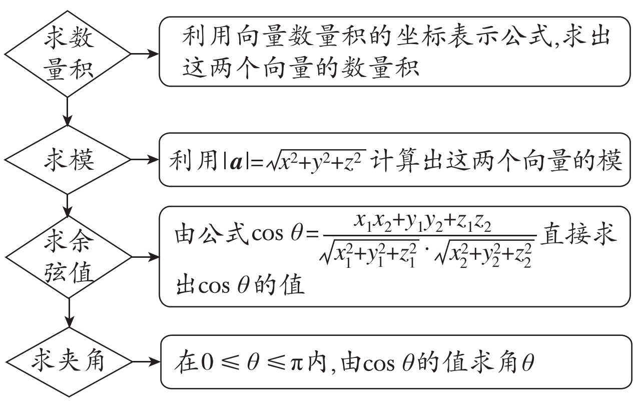
(1)字母表示下的运算.

利用 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$,将向量的模的运算转化为向量的数量积问题.

(2)坐标表示下的运算.

若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2+z^2$,于是有 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. 利用数量积求两向量夹角的步骤



◆ 探究点三 空间向量平行、垂直的坐标表示

例 3 (1)在空间中,已知 $\overrightarrow{AB}=(0,1,-4)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,m+1)$,若△$ABC$ 是直角三角形,则 m 的值为________.

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(1,4,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,2,4)$.

①若 $\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,求 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle$ 的值;

②若 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$,求实数 k 的值;

③若 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$,求实数 k 的值.

变式 (1)[2023·山东德州高二期中] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,2,y)$,且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{b}|=$ ( )

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{6}$

(2)[2023·石家庄二中高二期中] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,0,1)$,且 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则实数 λ 的值是 ( )

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 3 D. -3

[素养小结]

(1)判断空间向量垂直或平行的步骤:

对于 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,根据 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ 的值是否为 0 判断两向量是否垂直;根据 $x_1=\lambda x_2$,$y_1=\lambda y_2$,$z_1=\lambda z_2(\lambda\in\mathbf{R})$ 或 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$($x_2$,$y_2$,$z_2$ 都不为 0)是否成立判断两向量是否平行.

(2)平行与垂直的应用.

①适当引入参数(比如向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 平行,可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$),建立关于参数的方程.

②选择坐标形式,以达到简化运算的目的.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2023·武汉高二期中] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(2,1,x)$,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,则实数 x 的值是 ( )

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2. [2023·黑龙江齐齐哈尔高二期中] 已知空间向量 $\overrightarrow{AB}=(2,1,-3)$,$\overrightarrow{CB}=(1,-3,2)$,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

3. 已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,n,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$，若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}|=$ (　　)

A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{37}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

4. 与向量 $(-3,-4,5)$ 共线的单位向量为________________；写出一个与向量 $(1,3,-2)$，$(-3,-5,4)$ 均垂直的空间向量________.

5. [2023·陕西咸阳高二期中] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-4)$.

(1)求 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$；

(2)若向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 垂直，求实数 k 的值.

第2课时　空间直角坐标系及空间向量坐标的应用

【学习目标】

1. 了解空间直角坐标系；
2. 会求空间中的点的坐标，两点间的距离以及两点的中点坐标；
3. 掌握空间向量坐标的简单应用.

课前预习　知识导学　素养初识

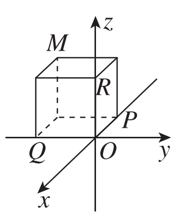
◆ 知识点一　空间直角坐标系的建立

在空间中任意选定一点 O 作为坐标原点，选择合适的平面先建立平面直角坐标系________，然后过 O 作一条与__________的数轴 z 轴，这样建立的空间直角坐标系记作________.

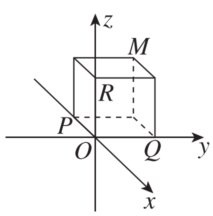
(1) x 轴、y 轴、z 轴是两两互相________的，它们都称为________.

(2)通过每两个坐标轴的平面都称为__________，分别记为________、________、________.

(3)在平面内画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般把 x 轴、y 轴画成水平放置，x 轴正方向与 y 轴正方向夹角为__________，z 轴与 y 轴(或 x 轴)________. 如图①②所示.



①



②

◆ 知识点二　空间直角坐标系下点的坐标与向量坐标

1. 空间中点的坐标

在空间直角坐标系中，点 M 的坐标为 (x,y,z)，则 x,y,z 都称为点 M 的__________，且 x 称为点 M 的________(或________)，y 称为点 M 的________(或 y 坐标)，z 称为点 M 的________(或________).

2. 空间直角坐标系下向量的坐标

在空间直角坐标系下，如果指定空间中的单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的始点都在原点 O，且它们的方向分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向相同，则 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是______________，且向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标与 P 点的坐标________，即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=$________ $\Leftrightarrow P$________.

3. 空间向量坐标的应用

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 为空间直角坐标系中的两点，则

(1) $\overrightarrow{AB}=$__________，即空间向量在空间直角坐标系中的坐标，等于表示这个空间向量的有向线段的终点坐标________始点坐标.

(2)若 M 是线段 AB 的中点,则 M 的坐标为________________.

(3)$|\overrightarrow{AB}|=$____________________________.

【诊断分析】判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)空间直角坐标系中 x 轴上的点的纵坐标为 0 且竖坐标为 0. (　)

(2)空间直角坐标系中 xOy 平面上的点的竖坐标为 0. (　)

(3)空间直角坐标系中,点$(1,\sqrt{3},2)$关于 yOz 平面的对称点为$(-1,\sqrt{3},2)$. (　)

(4)空间直角坐标系中的任意一个点都有唯一的实数对(x,y,z)与之对应. (　)

课中探究

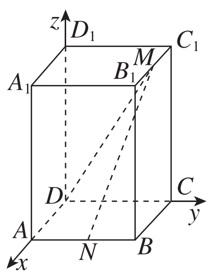
考点探究　素养小结

◆ 探究点一　空间点与向量的坐标表示

例 1 (1)在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=2$,$D_1D=3$,点 M 是 B_1C_1 的中点,点 N 是 AB 的中点.建立如图所示的空间直角坐标系.

①写出点 D,N,M 的坐标;

②求 $\overrightarrow{MD}$,$\overrightarrow{MN}$ 的坐标.



(2)若(1)中以 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系.

①写出点 D,N,M 的坐标;

②求 $\overrightarrow{MD}$,$\overrightarrow{MN}$ 的坐标.

变式 已知正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面边长为 4,侧棱长为 10,试建立适当的空间直角坐标系,并写出各顶点的坐标和向量 $\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{BC}$ 的坐标.

[素养小结]

空间中点 M 的坐标的三种确定方法:

(1)过 M 作 MM_1 垂直于平面 xOy,垂足为 M_1,求出 M_1 的 x 坐标和 y 坐标,再由射线 M_1M 的指向和线段 M_1M 的长度确定 z 坐标.

(2)构造以 OM 为体对角线的长方体,由长方体以 O 为共顶点的三条棱的长度结合点 M 的位置,可以确定点 M 的坐标.

(3)若题中所给的图形中存在垂直于坐标轴的平面,或点 M 在坐标轴或坐标平面上,则利用这一条件,再作坐标轴的垂线即可确定点 M 的坐标.

◆ 探究点二　空间中点的对称问题

例 2 (1)[2023·北京顺义区高二期中] 在空间直角坐标系中,已知点 $A(1,0,3)$与 $B(3,-2,-1)$关于点 M 对称,则点 M 的坐标是 (　)

A. $(1,1,1)$　　B. $(2,1,1)$

C. $(2,-1,1)$　　D. $(1,2,3)$

(2)已知点 $A(-3,1,-4)$,点 A 关于 xOy 平面的对称点的坐标为 ( )

A. $(-3,-1,-4)$

B. $(-3,-1,4)$

C. $(-3,1,4)$

D. $(3,-1,-4)$

变式 (1)已知点 $A(1,2,-1)$关于 xOy 平面的对称点为 B,而 B 关于 x 轴的对称点为 C,则 $|\overrightarrow{BC}|=$ ( )

A. 20　　B. 4

C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{2}$

(2)在空间直角坐标系中,点 B 是点 $A(3,4,5)$在 xOy 平面内的射影,则$|\overrightarrow{OB}|=$ ( )

A. 5　　B. 25

C. $\sqrt{34}$　　D. $\sqrt{41}$

[素养小结]

求空间对称点的规律方法:

(1)空间中点的对称问题可类比平面直角坐标系中点的对称问题,需要掌握对称点的变化规律,才能准确求解.对称点的问题常常采用"关于谁对称,谁保持不变,其余互为相反数"这个结论.

(2)空间直角坐标系中,任一点 $P(x,y,z)$的几种特殊对称点的坐标如下:

①关于原点的对称点的坐标是$(-x,-y,-z)$;

②关于 x 轴(横轴)的对称点的坐标是$(x,-y,-z)$;

③关于 y 轴(纵轴)的对称点的坐标是$(-x,y,-z)$;

④关于 z 轴(竖轴)的对称点的坐标是$(-x,-y,z)$;

⑤关于 xOy 平面的对称点的坐标是$(x,y,-z)$;

⑥关于 yOz 平面的对称点的坐标是$(-x,y,z)$;

⑦关于 zOx 平面的对称点的坐标是$(x,-y,z)$.

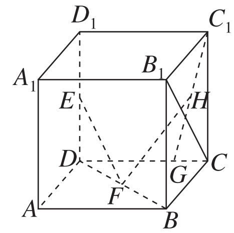
◆ 探究点三　空间向量坐标的应用

例 3 如图所示,在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 D_1D,BD 的中点,G 在棱 CD 上,且 $CG=\frac{1}{4}CD$,H 为 C_1G 的中点.

(1)求证:$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{B_1C}$;

(2)求 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{C_1G}$ 夹角的余弦值;

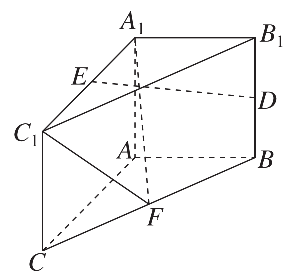
(3)求 FH 的长.



变式 [2023·江西浮梁一中高二期中] 如图,在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,棱 BB_1,A_1C_1,BC 的中点分别为 D,E,F.已知 $AB\perp AC$,$AB=2$,$AC=4$,$AA_1=2$.

(1)证明:$A_1F\perp DE$;

(2)求 $\sin\langle\overrightarrow{DE},\overrightarrow{C_1F}\rangle$的值.



[素养小结]

通过分析几何体的结构特征,建立适当的坐标系,使尽可能多的点落在坐标轴上,以便写点的坐标时便捷.建立坐标系后,先写出相关点的坐标,再写出相应向量的坐标,把向量坐标化,然后利用向量的坐标运算求解夹角和距离问题.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 在空间直角坐标系中,已知 $A(2,2,5)$,$B(4,6,3)$,则线段 AB 的长度是 ( )

A. $2\sqrt{6}$　　B. $4\sqrt{3}$

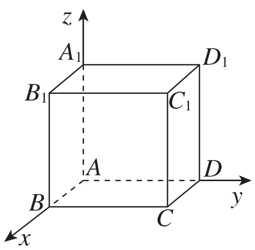
C. $4\sqrt{2}$　　D. 4

2. [2023·河南周口太康一中高二期中] 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,点 $M(m,n,p)$关于平面 xOy 对称的点的坐标是 ( )

A. $(m,n,-p)$　　B. $(m,-n,-p)$

C. $(-m,n,-p)$　　D. $(-m,-n,p)$

3. 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,建立空间直角坐标系如图所示,则正方形 AA_1B_1B 的对角线的交点坐标为 ( )



A. $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

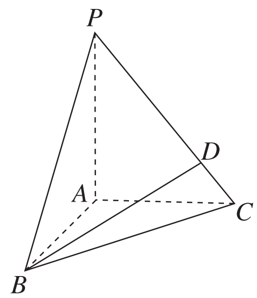
4. 如图,在三棱锥 P-ABC 中,$PA\perp$平面 ABC,$AB\perp AC$,且 $\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{DC}$,则 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影为 ( )

A. $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



5. 已知空间三点 $A(1,1,1)$,$B(-1,0,4)$,$C(2,-2,3)$,则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角 θ 的大小是________.

1.2　空间向量在立体几何中的应用

1.2.1　空间中的点、直线与空间向量

【学习目标】

1. 了解空间中的点与空间向量的关系,理解直线的方向向量;
2. 掌握利用空间向量证明两条直线平行或垂直的方法;
3. 掌握利用空间向量求空间中两条直线所成的角的方法;
4. 了解公垂线段的概念并会求其长度.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一　用向量表示点的位置

一般地,如果在空间中指定一点 O,那么空间中任意一点 P 的位置,都可以由向量________唯一确定,此时,$\overrightarrow{OP}$ 通常称为点 P 的____________.

◆ 知识点二　直线的方向向量

一般地,如果 l 是空间中的一条直线,$\boldsymbol{v}$ 是空间中的一个非零向量,且表示 $\boldsymbol{v}$ 的有向线段所在的直线与 l 平行或重合,则称 $\boldsymbol{v}$ 为直线 l 的一个方向向量. 此时,也称向量 $\boldsymbol{v}$ 与直线 l 平行,记作 $\boldsymbol{v}/\!/l$.

(1)如果 A,B 是直线 l 上两个不同的点,则 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}$ 就是直线 l 的一个方向向量;

(2)如果 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的一个方向向量,则对任意的实数 $\lambda\neq0$,空间向量 $\lambda\boldsymbol{v}$ 也是直线 l 的一个方向向量,而且直线 l 的任意两个方向向量都平行;

(3)空间中直线 l 的位置可由直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}$ 和 l 上的一个已知点唯一确定;

(4)如果 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 分别是直线 l_1,l_2 的一个方向向量,则 $\boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$ 或 l_1 与 l_2 重合.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

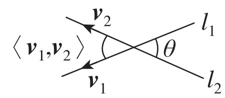
(1)直线 l 的方向向量是唯一的. ( )

(2)若两条直线平行,则它们的方向向量的方向相同或相反. ( )

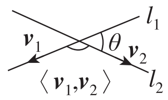
(3)若向量 $\boldsymbol{a}$ 是直线 l 的一个方向向量,则向量 $k\boldsymbol{a}$ 也是直线 l 的一个方向向量. ( )

◆ 知识点三　空间中两条直线所成的角

(1)设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 分别是空间中直线 l_1,l_2 的方向向量,且 l_1 与 l_2 所成角的大小为 θ,则 $\theta=$________(如图①所示)或 $\theta=$____________(如图②所示),所以 $\sin\theta=$________,$\cos\theta=$____________.



①



②

(2)$\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow$________$\Leftrightarrow\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=$________.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)两条异面直线所成的角与两直线方向向量所成的角相等或互补.　(　　)

(2)若两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$,两直线所成的角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$.　(　　)

(3)空间中两直线所成的角唯一确定,则两条直线对应的方向向量所成的角也唯一确定.　(　　)

◆ 知识点四　异面直线与空间向量

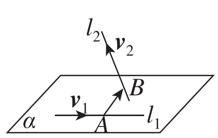
1. 异面直线的判定

设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 分别是空间中直线 l_1,l_2 的方向向量.

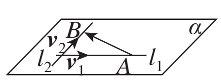
(1)若 l_1 与 l_2 异面,则 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 是不可能平行的.

(2)若 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不平行,则 l_1 与 l_2 的位置关系为________________.

(3)若 $A\in l_1,B\in l_2$,则 l_1 与 l_2 异面时,$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\overrightarrow{AB}$________;若 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\overrightarrow{AB}$ 不共面,则 l_1 与 l_2 异面.(如图①②所示)



①



②

2. 异面直线间的距离

一般地,如果 l_1 与 l_2 是空间中两条异面直线,$M\in l_1,N\in l_2$,____________,____________,则称 MN 为 l_1 与 l_2 的公垂线段.两条异面直线的公垂线段的长,称为这两条异面直线之间的________.

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)不相交的直线就是异面直线.　(　　)

(2)任意两条异面直线的公垂线段都只有一个.　(　　)

(3)设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 分别是空间中直线 l_1,l_2 的方向向量,若 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 不平行,则两条直线是异面直线.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　确定空间中点的位置

例 1 在空间直角坐标系中,O 是坐标原点,且 $A(2,-1,2)$,$B(4,5,-1)$,$C(-2,2,3)$,求适合下列条件的点 P 的坐标:

(1)$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$;(2)$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$.

变式 (1)已知点 $A(4,1,3)$,$B(2,-5,1)$,C 为线段 AB 上一点,且 $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{3}$,则点 C 的坐标为　(　　)

A. $\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{3}{8},-3,2\right)$

C. $\left(\dfrac{10}{3},-1,\dfrac{7}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

(2)已知点 P 是过点 $A(0,1,1)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$ 的直线上的一点,若 $|\overrightarrow{AP}|=3$,则点 P 的坐标是________.

[素养小结]

解决空间中点的位置问题常转化为向量共线、向量相等问题来解决,设出要求点的坐标,利用已知条件得关于要求点坐标的方程或方程组,求解即可.

◆ 探究点二　直线的方向向量

例 2 (多选题)已知一条直线经过 $A(2,3,2)$,$B(-1,0,5)$两点,下列向量中可以是该直线的方向向量的为　(　　)

A. $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$　　B. $\boldsymbol{a}=(-1,-1,1)$

C. $\boldsymbol{a}=(-3,-3,3)$　　D. $\boldsymbol{a}=(1,1,-1)$